Ekstrema globalne i warunkowe

Romuald Lenczewski

Katedra Matematyki
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska

Kwiecień 2020

Ekstrema globalne

Maksimum globalne

Największa wartość funkcji $f(x, y)$ na zbiorze $D \subset D_f$, gdzie D_f jest dziedzina naturalną funkcji f, nazywa się *maksimum globalnym* na D. Istnieje wtedy punkt $(x_0, y_0) \in D$, taki że

$$f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$$

dla wszystkich $(x, y) \in D$. Innymi słowy,

$$M := \max_{(x,y)\in D} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Możemy więc mówić albo o maksimum globalnym M w (x_0, y_0) lub o największej wartości M funkcji f na D.

Minimum globalne

Najmniejsza wartość funkcji $f(x, y)$ na zbiorze $D \subset D_f$, gdzie D_f jest dziedziną naturalną funkcji f, nazywa się *minimum globalnym* na D. Istnieje wtedy punkt $(x_0, y_0) \in D$, taki że

$$f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$$

dla wszystkich $(x, y) \in D$. Innymi słowy,

$$m := \min_{(x,y) \in D} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Możemy więc mówić albo o minimum globalnym m w (x_0, y_0) lub o najmniejszej wartości m funkcji f na D.

Uwagi

1. *Ekstremum globalne* to minimum globalne lub maksimum globalne.
2. Funkcja nie musi osiągać ani maksimum globalnego ani minimum globalnego na $D \subset D_f$.
3. Przykładowo, funkcja
$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$
nie osiąga minimum globalnego na $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ponieważ $\lim_{x\to\infty} f(x, y) = 0$ przy ustalonym y, ale wartości zero nie osiąga.
4. Nie osiąga też maksimum globalnego na D_f, ponieważ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \infty$.

Ekstrema globalne

Przykład $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ na $D=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 1\}$.

Jest to bardzo łatwy przykład, mamy bowiem

$$\begin{aligned} m &= \min_{(x,y)\in D} f(x,y)=0, \\ M &= \max_{(x,y)\in D} f(x,y)=1. \end{aligned}$$

Widać, że $m=0$ jest też minimum globalnym f na $D_f=\mathbb{R}^2$, ale maksimum globalnego na D_f nie ma.

Ekstrema globalne

Twierdzenie

Jeżeli f jest ciągła na $D \subset D_f$, gdzie D jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, to f osiąga maksimum globalne na D w jakimś punkcie $(x_1, y_1) \in D$ oraz minimum globalne na D w jakimś punkcie $(x_2, y_2) \in D$.

Uwaga

Jeżeli f jest ciągła na $D \subset D_f$, ale D nie jest domknięty lub nie jest ograniczony, to tej własności funkcja f może nie mieć.

Ekstrema globalne

Algorytm na globalne ekstrema na $D \subset D_f$

1. Algorytm stosuje się jeżeli D jest domknięty i ograniczony.
2. Krok 1: znajdujemy punkty krytyczne wewnątrz D: W_1.
3. Krok 2: znajdujemy punkty wewnątrz D, w których nie istnieje f_x lub f_y: W_2.
4. Krok 3: znajdujemy punkty na brzegu ∂D, w których może być najmniejsza lub największa wartość funkcji: W_3.
5. Dla $W = W_1 \cup W_2 \cup W_3$ obliczamy:

$$\begin{aligned} M &= \max\{f(x,y) : (x,y) \in W\} \\ m &= \min\{f(x,y) : (x,y) \in W\} \end{aligned}$$

Ekstrema globalne

Obserwacja

Zbiór punktów

$$W := W_1 \cup W_2 \cup W_3$$

to zbiór kandydatów na punkt, w którym jest największa lub najmniejsza wartość funkcji f. Algorytm nie przewiduje sprawdzania, czy w danym punkcie z tego zbioru jest ekstremum lokalne (jest to strata czasu).

Przykład $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ na kole $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

1. Krok pierwszy: szukamy punktów krytycznych wewnątrz D:

$$\begin{cases} f_x & = & 4x & = & 0 \\ f_y & = & 6y & = & 0 \end{cases}$$

   Otrzymujemy: $W_1 = \{(0,0)\}$.

2. Łatwo widać, że $W_2 = \emptyset$, ponieważ wszędzie istnieją pochodne cząstkowe (wielomian).

Przykład $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ na kole $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Badamy brzeg ∂D, parametryzując go:

$$x = \cos\phi, \;\; y = \sin\phi$$

gdzie $\phi \in [0, 2\pi]$. Definiujemy funkcję

$$g(\phi) = f(\cos\phi, \sin\phi) = 2\cos^2\phi + 3\sin^2\phi$$

dla $\phi \in [0, 2\pi]$ i szukamy kandydatów ϕ, w których $g(\phi)$ mogłaby mieć najmniejszą lub najwieksza wartość (czyli punktów, w których pochodna się zeruje lub nie istnieje, jak również końce odcinka).

Ekstrema globalne

Przykład $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ na kole $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Test pierwszej pochodnej dla g:

$$g'(\phi) = 4\cos\phi(-\sin\phi) + 6\sin\phi\cos\phi = \sin 2\phi$$

więc

$$g'(\phi) = 0 \iff \phi \in \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi\right\}$$

gdzie bierzemy pod uwagę tylko punkty wewnątrz przedziału, czyli $(0, 2\pi)$. Dodając końce odcinka: 0 oraz 2π i zauważając, że z okresowości $g(\phi)$ wystarczy wziąć jeden z nich, mamy

$$W_3 = \{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}$$

po wyliczeniu odpowiadających im punktów $(x,y) = (\cos\phi, \sin\phi)$.

Przykład $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ na kole $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Obliczamy $f(x,y)$ dla $(x,y) \in W$:

$$f(0,0) = 0, \ \ f(1,0) = f(-1,0) = 2, \ \ f(0,1) = f(0,-1) = 3,$$

więc

$$M = \max\{0,2,3\} = 3 \ \text{ w } \ (0,-1) \ \text{ oraz } \ (0,1)$$

$$m = \min\{0,2,3\} = 0 \ \text{ w } \ (0,0)$$

Ekstrema globalne

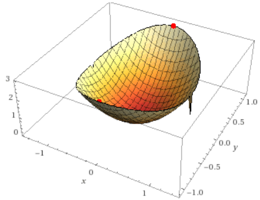
maximize	function	$2x^2 + 3y^2$
	domain	$x^2 + y^2 \le 1$ (unit disk)

Global maxima:

$\max\{2x^2 + 3y^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\} = 3$ at $(x, y) = (0, -1)$

$\max\{2x^2 + 3y^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\} = 3$ at $(x, y) = (0, 1)$

3D plot:

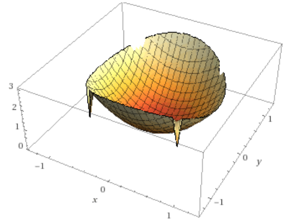


minimize	function	$2x^2 + 3y^2$
	domain	$x^2 + y^2 \le 1$ (unit disk)

Global minimum:

$\min\{2x^2 + 3y^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\} = 0$ at $(x, y) = (0, 0)$

3D plot:



Ekstrema globalne $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ na kole $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Made with: WolframAlpha®

Ekstrema globalne

Przykład $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ na $D = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 \leqslant 4\}$.

1. Krok pierwszy: szukamy punktów krytycznych wewnątrz D (zbiór ograniczony elipsą):

$$\begin{cases} f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases}$$

   Otrzymujemy: $W_1 = \emptyset$ ponieważ w $(0,0)$ pochodne cząstkowe nie istnieją.

2. Łatwo widać też, że $W_2 = \{(0,0)\}$.

Przykład $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ na $D=\{(x,y):x^2+4y^2\leqslant 4\}$.

Badamy brzeg ∂D: parametryzujemy go (jest to standardowa parametryzacja elipsy):

$$x=2\cos\phi,\quad y=\sin\phi$$

gdzie $\phi\in[0,2\pi]$. Definiujemy funkcję

$$g(\phi)=f(2\cos\phi,\sin\phi)=\sqrt{4\cos^2\phi+\sin^2\phi}=\sqrt{1+3\cos^2\phi}$$

dla $\phi\in[0,2\pi]$ i szukamy kandydatów ϕ, w których $g(\phi)$ mogłaby mieć najmniejszą lub najwiekszą wartość (pochodna się zeruje lub nie istnieje oraz końce odcinka).

Przykład $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ na $D=\{(x,y): x^2+4y^2\leqslant 4\}$.

Test pierwszej pochodnej dla g:

$$g'(\phi)=\frac{1}{2\sqrt{1+3\cos^2\phi}}\cdot 6\cos\phi\cdot(-\sin\phi)=-\frac{3\sin(2\phi)}{2\sqrt{1+3\cos^2\phi}}$$

więc

$$g'(\phi)=0 \iff \phi\in\left\{\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi\right\}$$

gdzie bierzemy pod uwagę tylko punkty wewnątrz przedziału, czyli $(0,2\pi)$. Dodając końce odcinka: 0 oraz 2π i zauważając, że z okresowości $g(\phi)$ wystarczy wziąć jeden z nich, mamy

$$W_3=\{(2,0),(0,1),(-2,0),(0,-1)\}$$

po wyliczeniu odpowiadających im punktów $(x,y)=(2\cos\phi,\sin\phi)$.

Ekstrema globalne

Przykład $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ na $D = \{(x,y) : x^2+4y^2 \leqslant 4\}$.

Obliczamy $f(x,y)$ dla $(x,y) \in W$:

$$f(0,0) = 0, \quad f(2,0) = f(-2,0) = 2, \quad f(0,1) = f(0,-1) = 1$$

więc

$$M = \max\{0,1,2\} = 2 \;\; \text{w} \;\; (2,0) \;\; \text{oraz} \;\; (-2,0)$$

$$m = \min\{0,1,2\} = 0 \;\; \text{w} \;\; (0,0)$$

Widzimy, że minimum globalne jest w punkcie, w którym nie ma pochodnych cząstkowych (wierzchołek stożka), natomiast maksimum globalne jest na brzegu.

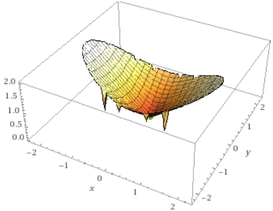
Ekstrema globalne

minimize	function	$\sqrt{x^2+y^2}$
	domain	$x^2+4y^2 \leq 4$

Global minimum:

$\min\left\{\sqrt{x^2+y^2} \;\middle|\; x^2+4y^2 \leq 4\right\} = 0$ at $(x, y) = (0, 0)$

3D plot:



Input interpretation:

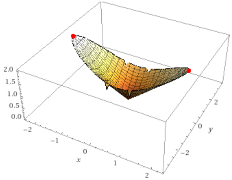
maximize	function	$\sqrt{x^2+y^2}$
	domain	$x^2+4y^2 \leq 4$

Global maxima:

$\max\left\{\sqrt{x^2+y^2} \;\middle|\; x^2+4y^2 \leq 4\right\} = 2$ at $(x, y) = (-2, 0)$

$\max\left\{\sqrt{x^2+y^2} \;\middle|\; x^2+4y^2 \leq 4\right\} = 2$ at $(x, y) = (2, 0)$

3D plot:



Ekstrema globalne $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ na $x^2+4y^2 \leqslant 4$.

Made with: *WolframAlpha*®

Przykład $f(x,y) = \sin(xy)$ na $D = [-\pi,\pi] \times [0,1]$.

Jest to trudniejszy przykład, w którym jest nieskończenie wiele punktów krytycznych. Będzie nieco więcej obliczeń.

1. Punkty krytyczne:

$$\begin{cases} f_x = y\cos(xy) = 0 \\ f_y = x\cos(xy) = 0 \end{cases}$$

2. Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań wewnątrz D: (uwaga!: $(0,0)$ nie należy do wnętrza D) wszystkie (x,y) wewnątrz D dla których $xy = \pi/2$ lub $xy = -\pi/2$, więc:

$$W_1 = \{(x,y) : |xy| = \pi/2, y \in (0,1)\}$$

3. Widać, że $W_2 = \varnothing$.

Ekstrema globalne

Przykład $f(x,y) = \sin(xy)$ na $D = [-\pi, \pi] \times [0,1]$.

Brzeg ∂D składa się z 4 odcinków: I_1, I_2, I_3, I_4 (boki prostokąta):

1. Odcinek I_1: $x \in [-\pi, \pi]$ oraz $y = 0$.
2. Odcinek I_2: $x = \pi$ oraz $y \in [0,1]$.
3. Odcinek I_3: $x \in [-\pi, \pi]$ oraz $y = 1$.
4. Odcinek I_4: $x = -\pi$ oraz $y \in [0,1]$,

Jak widać, każdy odcinek musimy sparametryzować oddzielnie. Podobna sytuacja jest, gdy obszar D jest trójkątem.

Ekstrema globalne

Przykład $f(x, y) = \sin(xy)$ na $D = [-\pi, \pi] \times [0, 1]$.

Odcinek I_1: $x \in [-\pi, \pi]$ oraz $y = 0$, wtedy badamy

$$g(x) := f(x, 0) = 0$$

więc otrzymujemy nieskończenie wielu kandydatów do zbioru W_3: wszystkie $\{(x, 0) : x \in [-\pi, \pi]\}$.

Ekstrema globalne

Przykład $f(x,y) = \sin(xy)$ na $D = [-\pi,\pi] \times [0,1]$.

Odcinek I_2: $x = \pi$ oraz $y \in [0,1]$, wtedy badamy

$$g(y) := f(\pi, y) = \sin(\pi y)$$

oraz

$$g'(y) = \pi\cos(\pi y) = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2},$$

więc mamy 3 kandydatów: $(\pi, 1/2)$ oraz końce odcinka $(\pi, 0), (\pi, 1)$ do zbioru W_3.

Ekstrema globalne

Przykład $f(x, y) = \sin(xy)$ na $D = [-\pi, \pi] \times [0, 1]$.

Odcinek I_3: $x \in [-\pi, \pi]$ oraz $y = 1$, wtedy badamy

$$g(x) := f(x, 1)$$

oraz

$$g'(x) = \cos x = 0 \Longleftrightarrow x \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$$

więc mamy $(\pi/2, 1), (-\pi/2, 1)$ oraz końce odcinka $(-\pi, 1), (\pi, 1)$ do zbioru W_3.

Przykład $f(x,y) = \sin(xy)$ na $D = [-\pi,\pi] \times [0,1]$.

Odcinek I_4: $x = -\pi$ oraz $y \in [0,1]$, wtedy

$$g(x) := f(-\pi, y) = -\sin(\pi y)$$

oraz

$$g'(y) = -\pi\cos(\pi y) = 0 \iff y = \frac{1}{2},$$

więc mamy $(-\pi, 1/2)$ oraz końce odcinka $(-\pi, 0)$, $(-\pi, 1)$ do zbioru W_3.

Ekstrema globalne

Przykład $f(x,y) = \sin(xy)$ na $D = [-\pi,\pi] \times [0,1]$.

Podsumowanie: niektóre punkty się powtarzają, więc mamy

$$W = \{(\pi,1),(-\pi,1)\} \cup \{(x,\frac{\pi}{2x}) : x \in (0,\pi]\}$$

$$\cup\{(x,-\frac{\pi}{2x}) : x \in [-\pi,0)\} \cup \{(x,0) : x \in [-\pi,\pi]\}$$

Obliczamy $f(x,y)$ dla $(x,y) \in W$:

$$f(\pi,1) = 0, f(-\pi,1) = 0$$

$$f(x,\frac{\pi}{2x}) = 1,\ f(x,-\frac{\pi}{2x}) = -1,\ f(x,0) = 0$$

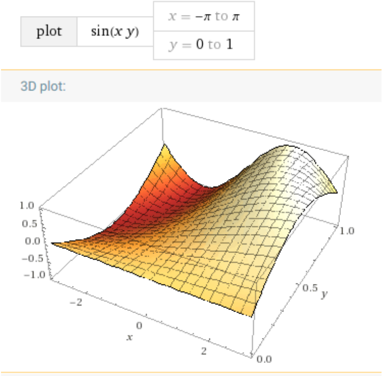
Przykład $f(x,y) = \sin(xy)$ na $D = [-\pi, \pi] \times [0,1]$.

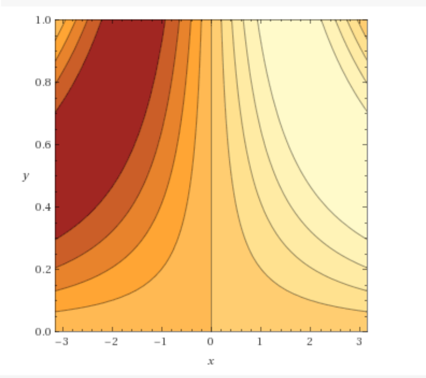
Obliczamy:

$$M = \max\{-1, 0, 1\} = 1 \ \text{ na } \ \{(x, \pi/(2x)),\ x \in (0, \pi]\}$$

$$m = \min\{-1, 0, 1\} = -1 \ \text{ na } \ \{(x, -\pi/(2x)),\ x \in [-\pi, 0)\}$$

Przykład





Wykres funkcji $f(x,y) = \sin(xy)$ i jej poziomic jest ilustracją do naszych obliczeń.

Made with: *WolframAlpha*®

Ekstrema warunkowe

Ekstrema warunkowe

1. Przechodzimy do badania tzw. ekstremów warunkowych. Chodzi o zbadanie, gdzie funkcja $f(x, y)$ może mieć ekstremum lokalne pod dodatkowym warunkiem zadanym równaniem
$$g(x, y) = 0.$$
2. Co ciekawe, funkcja f może nie mieć w ogóle ekstremów lokalnych, ale będzie miała ekstrema warunkowe.
3. Ekstrema warunkowe mają wiele zastosowań w ekonomii, gdzie chcemy zmaksymalizować jakąś funkcję (przychód, dochód, etc.) przy pewnych dodatkowych warunkach.
4. Ograniczymy się do przypadku jednego warunku, ale podobna metoda zachodzi dla większej ich liczby.

Ekstrema warunkowe

1. Mówimy, że funkcja $f(x, y)$ ma *maksimum warunkowe* w punkcie $(x_0, y_0) \in D_f$ pod warunkiem
$$g(x, y) = 0$$
jeżeli $g(x_0, y_0) = 0$ oraz $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ dla dowolnego $(x, y) \in D_f \cap \{(x, y) : \ g(x, y) = 0\}$.
2. Mówimy, że funkcja $f(x, y)$ ma *minimum warunkowe* w punkcie $(x_0, y_0) \in D_f$ pod warunkiem
$$g(x, y) = 0$$
jeżeli $g(x_0, y_0)$ oraz $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$ dla dowolnego $(x, y) \in D_f \cap \{(x, y) : \ g(x, y) = 0\}$.
3. W obu przypadkach mówimy, że funkcja $f(x, y)$ ma *ekstremum warunkowe* w punkcie $(x_0, y_0) \in D_f$.

Przykład $f(x,y) = x^2y - \ln x$ pod warunkiem $8x + 3y = 0$

W tym prostym przykładzie można ekstrema warunkowe wyznaczyć, redukując problem do ekstremów funkcji jednej zmiennej.
Wystarczy podstawić

$$y = -\frac{8}{3}x$$

do wzoru na f i badać funkcję

$$h(x) = f(x, -\frac{8}{3}x) = -\frac{8}{3}x^3 - \ln x$$

zwykłymi metodami dla funkcji jednej zmiennej (obliczenia pomijamy).

Przykład $f(x,y) = 3xy + 2$ pod warunkiem $x^2 + y^2 = 1$

Tu warunek możemy rozbić na dwa przypadki:

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \vee \quad y = -\sqrt{1 - x^2}$$

i badać dwie funkcje

$$h_1(x) = 3x\sqrt{1 - x^2} + 2 \quad \vee \quad h_2(x) = -3x\sqrt{1 - x^2} + 2,$$

obie na przedziale $[-1, 1]$ metodami dla funkcji jednej zmiennej. Tu obliczenia też pominiemy, ale będzie komputerowo uzyskany wykres i maksima (proszę sobie sprawdzić i zbadać też minima).

Przykład

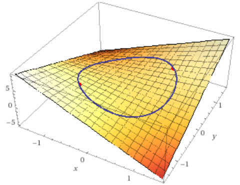
maximize	function	$3xy+2$
	domain	$x^2+y^2=1$ (unit circle)

Global maxima:

$\max\{3xy+2 \mid x^2+y^2=1\} = \frac{7}{2}$ at $(x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\max\{3xy+2 \mid x^2+y^2=1\} = \frac{7}{2}$ at $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

3D plot:



Ekstrema warunkowe $f(x,y) = 3xy + 2$ pod warunkiem $x^2 + y^2 = 1$.

Made with: WolframAlpha®

Ekstrema warunkowe

Systematyczna metoda szukania ekstremów warunkowych pochodzi od Lagreange'a i nosi nazwę *metody mnożników Lagrange'a*. W przypadku jednego warunku możemy mówić o jednym mnożniku. Schemat postępowania jest następujący:

1. Definiujemy *funkcję Lagrange'a*:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

2. Szukamy kandydatów na ekstrema lokalne, nakładając warunki

$$\begin{cases} F_x & = & 0 \\ F_y & = & 0 \\ F_\lambda & = & 0 \end{cases}$$

3. Ostatnie równanie można zastąpić równaniem $g(x, y) = 0$.

Uwagi

1. Niektórzy autorzy definiują funkcję F jako

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y),$$

   co jest równoważne, ponieważ mnożnik λ pełni rolę pomocniczą.

2. Układ równań daje jedynie warunki konieczne, w przypadku gdy istnieją pochodne cząstkowe f_x, f_y.
3. Mogą istnieć warunkowe ekstrema lokalne w punktach, w których nie ma f_x lub f_y.
4. Warunki dostateczne otrzymuje sie, obliczając pewien wyznacznik $\mathcal{H}$, o dziwnej nazwie: *Hesjan obrzeżony*, podobny do zwykłego Hesjanu.

Hesjan obrzeżony

Jeżeli $f(x, y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu w punkcie (x_0, y_0) oraz $g(x, y)$ ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w (x_0, y_0), to *Hesjanem obrzeżonym* nazywamy wyznacznik postaci

$$\mathcal{H} = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & f_{xx} & f_{xy} \\ g_y & f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}.$$

gdzie dla uproszczenia przyjmujemy, że $f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, f_{yy}, g_x, g_y$ oznaczają wartości w punkcie (x_0, y_0). Z ciągłości pochodnych mieszanych mamy też $f_{xy} = f_{yx}$.

Twierdzenie

Załóżmy, że $f(x,y)$ *ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu w punkcie* (x_0,y_0), $g(x,y)$ *ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w* (x_0,y_0), *oraz* (x_0,y_0,λ_0) *jest rozwiązaniem układu równań:*

$$\begin{cases} F_x & = & 0 \\ F_y & = & 0 \\ F_\lambda & = & 0 \end{cases}$$

Wtedy zachodzą implikacje:

1. *jeżeli* $\mathcal{H} > 0$ *w* (x_0,y_0,λ_0), *to* f *ma w* (x_0,y_0) *warunkowe maksimum lokalne,*
2. *jeżeli* $\mathcal{H} < 0$ *w* (x_0,y_0,λ_0), *to* f *ma w* (x_0,y_0) *warunkowe minimum lokalne.*

Przykład $f(x, y) = 2x + 3y$ pod warunkiem $x^2 + y^2 = 1$.

- Zastosujemy metodę mnożników Lagrange'a.

$$F(x, y, \lambda) = 2x + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} F_x &= 2 + 2\lambda x = 0 \\ F_y &= 3 + 2\lambda y = 0 \\ F_\lambda &= x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

- Rozwiązując pierwsze dwa równania względem λ:

$$\lambda = -\frac{1}{x} = -\frac{3}{2y} \quad \text{czyli} \quad x = \frac{2y}{3}$$

- Wstawiając do trzeciego równania, otrzymujemy

$$y_0 = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \vee \quad y_0 = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

Przykład $f(x,y) = 2x + 3y$ pod warunkiem $x^2 + y^2 = 1$.

- Otrzymujemy $(x_0, y_0, \lambda_0) = \pm(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{\sqrt{13}}{2})$.
- Obliczamy pochodne
  $F_{xx} = 2\lambda, \;\; F_{yy} = 2\lambda, \;\; F_{xy} = F_{yx} = 0, \;\; g_x = 2x, \;\; g_y = 2y.$
- Hesjan obrzeżony:

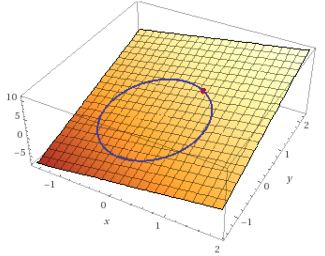
$$\mathcal{H} = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & f_{xx} & f_{xy} \\ g_y & f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x_0 & 2y_0 \\ 2x_0 & 2\lambda_0 & 0 \\ 2y_0 & 0 & 2\lambda_0 \end{vmatrix} = -8\lambda_0(x_0^2 + y_0^2)$$

- Zatem: $\mathcal{H} > 0$ w $(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{\sqrt{13}}{2})$ (maksimum lokalne warunkowe równe $\sqrt{13}$) oraz $\mathcal{H} < 0$ w $(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{\sqrt{13}}{2})$ (minimum lokalne warunkowe równe $-\sqrt{13}$)

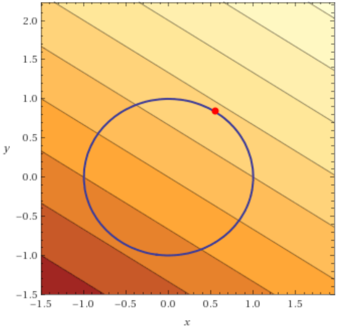
Global maximum:

$$\max\{2x+3y \mid x^2+y^2=1\}=\sqrt{13} \quad \text{at } (x,y)=\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

3D plot:



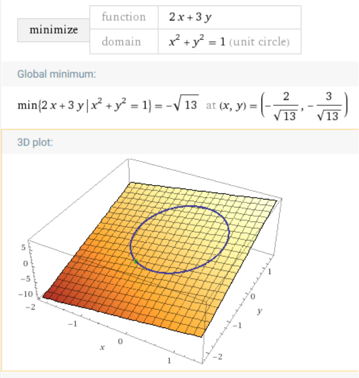
Contour plot:

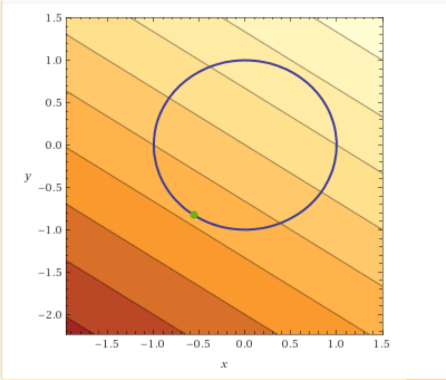


Maksimum warunkowe $f(x,y)=2x+3y$ na okręgu $x^2+y^2=1$.

Made with: WolframAlpha®

Przykład





Minimum warunkowe $f(x, y) = 2x + 3y$ na okręgu $x^2 + y^2 = 1$.

Made with: WolframAlpha®

Przykład $f(x,y) = -x^2 - y^2$ pod warunkiem $xy = 1$.

- Zastosujemy metodę mnożników Lagrange'a.

$$F(x,y,\lambda) = -x^2 - y^2 + \lambda(xy-1)$$

$$\begin{cases} F_x &= & -2x + \lambda y = 0 \\ F_y &= & -2y + \lambda x = 0 \\ F_\lambda &= & xy - 1 = 0 \end{cases}$$

- Rozwiązując pierwsze dwa równania względem λ,

$$\lambda = \frac{2x}{y} = \frac{2y}{x} \ \text{czyli} \ x^2 = y^2 \ \text{zatem} \ y = \pm x$$

- Wstawiając to do trzeciego równania, otrzymujemy (tylko dla $y = x$) wynik $x_0 = \pm 1$, co daje

$$(x_0, y_0, \lambda_0) = (1,1,2) \quad \vee \ (-1,-1,2)$$

Przykład $f(x, y) = -x^2 - y^2$ pod warunkiem $xy = 1$.

- Obliczamy pochodne
  $F_{xx} = -2, \;\; F_{yy} = -2, \;\; F_{xy} = F_{yx} = \lambda, \;\; g_x = y, \;\; g_y = x.$
- Hesjan obrzeżony:

$$\mathcal{H} = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & f_{xx} & f_{xy} \\ g_y & f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & y_0 & x_0 \\ y_0 & -2 & \lambda_0 \\ x_0 & \lambda_0 & -2 \end{vmatrix} = 2(x_0^2 + y_0^2 + \lambda_0 x_0 y_0)$$

- Zatem: $\mathcal{H} > 0$ w $(1, 1, 2)$ (maksimum lokalne warunkowe równe -2) oraz $\mathcal{H} > 0$ w $(-1, -1, 2)$ (maksimum lokalne warunkowe równe -2)

Ekstrema warunkowe

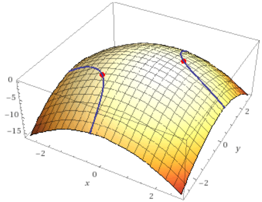
local maxima	function	$-x^2 - y^2$
	domain	$x\,y = 1$

Results:

$\max\{-x^2 - y^2 \mid x\,y = 1\} \approx -2.$ at $(x, y) \approx (-1., -1.)$

$\max\{-x^2 - y^2 \mid x\,y = 1\} \approx -2.$ at $(x, y) \approx (1., 1.)$

3D plot:



Maksima warunkowe $f(x, y) = -x^2 - y^2$ na hiperboli $xy = 1$.

Made with: *WolframAlpha*®

Koniec

Dziękuję za uwagę!